Статистический анализ потока отказов восстанавливаемых систем и проблема профилактики

Федоткин М.А.
Кафедра ПТВ
ННГУ им. Н.И. Лобачевского
Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Россия
fma5@rambler.ru

Федоткин А.М.
Кафедра ЧиФА
ННГУ им. Н.И. Лобачевского
Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Россия

Аннотация

В работе изучена случайная последовательность моментов отказов восстанавливаемой управляющей системы, функционирующей в экстремальных условиях. Интервалы между последовательными выходами из строя элементов являются зависимыми и имеют различные распределения. Поэтому не удается найти распределение числа отказов элементов системы. Рассмотрен нетрадиционный способ описания потока отказов такой сложной вероятностной структуры. Этот способ основан на выделении так называемых главных элементов, выход из строя которых порождает группу новых отказов. Предложен и апробирован алгоритм распознавания главных элементов. Проведен статистический анализ моментов выхода из строя главных элементов и числа отказов в группе с целью выполнения профилактики в системе для повышения надёжности её работы.

1 Математическая формулировка проблемы

Пусть T есть множество моментов времени t. Промежуток времени T может быть конечным или бесконечным, дискретным или непрерывным. При каждом $t \in T$ обозначим через E_t статистически устойчивый эксперимент. Семейство $E = \{E_t;\ t \in T\}$ есть эволюционный эксперимент или физическая управляющая система [1–3]. Управляющая система состоит из большого числа различных элементов. Каждый элемент имеет метку $\gamma \in \Gamma$. При этом Γ является счетным множеством. При функционировании управляющей системы могут быть случайные во времени сбои за счет ненадежности работы ее элементов. Любой вышедший из строя элемент заменяется мгновенно новым из некоторого резерва с той же меткой. Обозначим через $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P(\cdot))$ вероятностную модель для эволюционного эксперимента E. Элемент ω из множества Ω есть описание элементарного исхода эксперимента E. При этом $\mathcal{F}$ есть σ-алгебра всех исходов управляющей системы, и $P(\cdot)$ является вероятностной функцией на $\mathcal{F}$. Случайное событие $A_\gamma \in \mathcal{F}$ интерпретируем как выход из строя элемента с меткой γ в произвольный момент t. При каждом $i = 1,\ 2,\ \ldots$ случайная величина τ_i' определяет i-ый момент выхода из строя элемента с меткой $\nu_i \in \Gamma$. Тогда двумерная случайная последовательность $\{(\tau_i',\ \nu_i);\ i \geq 1\}$ образует моменты сбоев управляющей системы и множество используемых для замены резервных элементов. По наблюдениям за конечным отрезком последовательности $\{(\tau_i',\ \nu_i);\ i \geq 1\}$ с использованием методов статистического анализа и различных алгоритмов из работы [2] определяются так называемые главные элементы управляющей системы. Эти элементы выделяют подмножество $\{A_\theta :\ \theta \in \Theta\}$ множества $\{A_\gamma :\ \gamma \in \Gamma\}$, т. е. $\Theta \subset \Gamma$. Главные элементы порождают эпидемию сбоев управляющей системы. Это позволяет построить простой план профилактики системы, обеспечивающий значительное повышение ее надежности.

Обозначим теперь через $\tau' = \{\tau_i';\ i \geq 1\}$ последовательность моментов наступления событий из $\{A_\gamma \in \mathcal{F} :\ \gamma \in \Gamma\}$. Если множество $\{A_\gamma \in \mathcal{F} :\ \gamma \in \Gamma\}$ составлено из несовместимых событий, то поток $\{(\tau_i',\ \nu_i);\ i \geq 1\}$ является ординарным. В дальнейшем будем рассматривать только этот случай. Потоку $\{(\tau_i',\ \nu_i);\ i \geq 1\}$ взаимно однозначно соответствует считающий случайный процесс $\{\eta(t);\ t \geq 0\}$. Здесь $\eta(t)$ при $t > 0$ определяет число событий на промежутке $[0,\ t)$ из множества $\{A_\gamma \in \mathcal{F} :\ \gamma \in \Gamma\}$ и $\eta(t) = \eta(t-0)$, $\eta(0) = 0$. Как правило случайные величины $\tau_{i+1}' - \tau_i',\ i \geq 1$ являются зависимыми и имеют различные функции распределения. В этом случае практически не удается найти распределения вероятностей для процесса $\{\eta(t);\ t \geq 0\}$. В работе рассматривается именно такая сложная ситуация.

Пусть теперь $\tau_0 = \tau_1'$ и $\{\tau_i;\ i \geq 0\}$ есть последовательность моментов наступления событий из $\{A_\theta \in \mathcal{F} :\ \theta \in \Theta\}$. Обозначим через η_i число всех наблюдаемых событий из $\{A_\gamma \in \mathcal{F} :\ \gamma \in \Gamma\}$ на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \geq 0$. Так как $\{A_\theta \in \mathcal{F} : \theta \in \Theta\} \subset \{A_\gamma \in \mathcal{F} : \gamma \in \Gamma\}$ и $\tau_0 = \tau'_1$, то $\tau_i = \tau'_{k_i}$ при $i \geq 0$, $k_i \in \{1, 2, ...\}$, $k_0 = 1$. События из множества $\{A_\theta \in \mathcal{F} : \theta \in \Theta\}$ означают выход из строя главных элементов системы E. В дальнейшем вместо потока $\{(\tau'_i,\ \nu_i);\ i \geq 1\}$ наблюдаемых событий из множества $\{A_\gamma \in \mathcal{F} : \gamma \in \Gamma\}$ предлагается рассматривать поток $\{(\tau_i, \eta_i);\ i \geq 0\}$ событий из множества $\{A_\theta \in \mathcal{F} : \theta \in \Theta\}$, где $\eta_i = \eta(\tau_{i+1}) - \eta(\tau_i)$, $i \geq 0$. Потоку $\{(\tau_i, \eta_i);\ i \geq 0\}$ моментов выхода из строя главных элементов системы отвечает считающая последовательность $\{\eta_i;\ i \geq 0\}$. Случайную величину η_i при каждом $\{i \geq 0\}$ будем называть $i-$ой пачкой (группой) потока $\{(\tau_i, \eta_i);\ i \geq 0\}$.

Пусть известны распределения для потока $\{(\tau'_i,\ \nu_i);\ i \geq 1\}$. Тогда за счет специального выбора множества $\{A_\theta \in \mathcal{F} : \theta \in \Theta\}$ иногда удается найти простые распределения потока $\{(\tau_i, \eta_i);\ i \geq 0\}$. К сожалению почти всегда распределение основного потока $\{(\tau'_i,\ \nu_i);\ i \geq 1\}$ событий из $\{A_\gamma \in \mathcal{F} : \gamma \in \Gamma\}$ неизвестны или, в лучшем случае, имеют сложный вид. Поэтому возникает проблема выбора множества $\{A_\theta \in \mathcal{F} : \theta \in \Theta\}$, позволяющего по наблюдениям за конечным отрезком последовательности $\{(\tau'_i,\ \nu_i);\ i \geq 1\}$ идентифицировать распределение вспомогательного потока $\{(\tau_i, \eta_i);\ i \geq 0\}$.

2 Алгоритмы распознования главных элементов системы

В приложениях потоки $\{(\tau'_i,\ \nu_i);\ i \geq 1\}$ подвергаются различным преобразованиям. Эти преобразования приводят либо к изменениям расположений моментов τ'_i, $i \geq 1$, на оси времени, либо к появлению и исчезновению таких моментов. В отличие от этого в данной работе первоначальный поток $\{(\tau'_i,\ \nu_i);\ i \geq 1\}$ не изменяется. С помощью выбора функциональной зависимости элементов τ_i, $i \geq 0$ от моментов τ'_i, $i \geq 1$ строится множество $\{A_\theta \in \mathcal{F} : \theta \in \Theta\}$. На содержательном уровне происходит разбиение потока $\{(\tau'_i,\ \nu_i);\ i \geq 1\}$ моментами τ_i, $i \geq 0$, с целью более простого его описания. Таким образом, цели и методы преобразования потоков $\{(\tau'_i,\ \nu_i);\ i \geq 1\}$ в данной работе совершенно отличаются от известных в литературе [4]. В данной работе рассматриваются три следующих способа преобразования потоков $\{(\tau'_i,\ \nu_i);\ i \geq 1\}$. Рассмотрим сначала наиболее простой из них.

Первый способ. Предположим, что метка $\nu_1 \in \Gamma$. первого момента τ'_1 выхода из строя элемента системы совпадает с меткой одного из главных элементов. В этом так называемом синхронном случае случайные величины τ_i, $i \geq 0$, определяются соотношениями

$$\tau_i = \tau'_{k_i}, \quad k_{i+1} = \inf\{k : k > k_i,\ \tau'_k - \tau'_{k-1} \geq h_0\}, \quad i \geq 0,$$

где $k_0 = 1$, $h_0 = const > 0$ и $\tau'_1, \tau'_2, ...$ — абсциссы точек разрыва исходного считающего процесса $\{\eta(t);\ t \geq 0\}$ или моменты наступления событий. Если множество $\{k : k > k_i, \tau'_k - \tau'_{k-1} \geq h_0\} = \oslash$ при некотором $i \geq 0$, то полагаем $\tau_{i+1} = +\infty$. Итак, этот алгоритм так выбирает элементы τ_i, $i \geq 0$, что каждому интервалу $[\tau_i, \tau_{i+1})$ соответствует $i-$ая пачка $\eta_i = k_{i+1} - k_i$. Заметим, что формула $\eta_i = k_{i+1} - k_i$ не имеет места при $\{k : k > k_i,\ \tau'_k - \tau'_{k-1} \geq h_0\} = \oslash$ и конечном числе случайных событий исходного точечного процесса τ'. Однако пачка η_i всегда определяет количество событий на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$. При этом произвольный $i-$ый момент τ_i совпадает с некоторым моментом τ'_{k_i} разрыва считающего процесса $\{\eta(t);\ t \geq 0\}$, а интервалы между любыми двумя последовательными событиями из $i-$ой группы строго меньше величины h_0, т. е. события условно объединяются в пачки по принципу близости моментов их наступления. Наконец, интервал между моментом наступления последнего события из $i-$ой группы и моментом наступления первого события пачки с номером $(i + 1)$ не меньше величины h_0. Этот интервал будем называть интервалом между двумя последовательными пачками.

Второй способ. Пусть теперь метка $\nu_1 \in \Gamma$ первого момента τ'_1 выхода из строя элемента системы не является меткой одного из главных элементов. В этом так называемом асинхронном случае предлагается второй способ преобразования первоначального потока $\{(\tau'_i,\ \nu_i);\ i \geq 1\}$. Согласно этому способу будем определять случайные величины τ_i, $i \geq 0$, равенствами

$$\tau_i = \tau'_{k_i}, \quad k_0 = \inf\{k : k \geq 1,\ \tau'_{k+1} - \tau'_k \geq h_0\} + 1,$$

$$k_{i+1} = \inf\{k : k > k_i,\ \tau'_k - \tau'_{k_i} \geq h_0\}, \quad i \geq 0.$$

При втором алгоритме выбора точечного процесса $\{\tau_i;\ i \geq 0\}$ сначала идет поиск первого момента $\tau_0 = \tau'_{k_0}$ выхода из строя главного элемента системы с помощью поиска первого временного разрыва в первоначальном потоке $\{(\tau'_i,\ \nu_i);\ i \geq 1\}$.

Третий способ. При каждом $c = 0, 1, ...$ обозначим через $\tau^{(c)} = \{\tau_i^{(c)};\ i \geq 0\}$ определяемый ниже поток событий на оси времени $[0, \infty)$, которые связаны с выходом из строя главных элементов. Предполагаем, что моменты $\tau_i^{(c)},\ i \geq 0$, этого потока совпадают с некоторыми точками разрыва исходного считающего процесса $\{\eta(t);\ t \geq 0\}$. Тогда имеем

$$\tau_i^{(c)} = \tau'_{k_{c,i}}, \quad k_{c,i} \in \{1, 2, ...\}.$$

Пусть величина $\eta_i^{(c)} = k_{c,i+1} - k_{c,i}$ задает число событий на промежутке $[\tau_i^{(c)}, \tau_{i+1}^{(c)})$ и является $i-$ой группой потока $\{(\tau_i^{(c)}, \eta_i^{(c)});\ i \geq 0\}$ событий из $\{A_\gamma \in \mathcal{F} :\ \gamma \in \Gamma\}$. Случайная величина вида $\delta_i^{(c)} = \tau'_{k_{c,i+1}} - \tau'_{k_{c,i+1}-1}$ определяет временной интервал между последовательными группами $\eta_i^{(c)}$, $\eta_{i+1}^{(c)}$ исходного считающего процесса $\{\eta(t);\ t \geq 0\}$ при его новом описании в виде последовательности $\{\eta_i^{(c)};\ i \geq 0\}$. Тогда элементы $\tau_i^{(c)},\ c \geq 0,\ i \geq 0$, потоков $\tau^{(c)},\ c \geq 0,$ событий из множества $\{A_\theta \in \mathcal{F} :\ \theta \in \Theta\}$ будем строить с помощью рекуррентных соотношений вида

$$k_{0,i+1} = \inf\{k :\ k > k_{0,i},\ \tau'_k - \tau'_{k-1} \geq h_0\},$$

$$s_c = \min\{\ \inf\{\ k :\ k \geq 0,\ \eta_k^{(c)} \leq d,\ \eta_{k+1}^{(c)} = d + 1,\ \delta_k^{(c)} < h_1\},$$
$$\inf\{k :\ k \geq 0,\ \eta_k^{(c)} \leq d,\ \eta_{k+1}^{(c)} \leq d,\ \delta_k^{(c)} < h_2\}\},$$

$$\tau_i^{(c+1)} = \begin{cases} \tau_i^{(c)}, & i \leq s_c, \\ \tau_{i+1}^{(c)}, & i > s_c. \end{cases}$$

В этих формулах $k_{0,0} = 1$, d — некоторое натуральное число, и постоянные величины h_0, h_1, h_2 удовлетворяют условию $h_0 < h_1 < h_2$.

При третьем алгоритме выбора последовательности $\{\tau_i;\ i \geq 0\}$ сначала происходит разбиение исходного процесса $\{\tau'_i;\ i \geq 1\}$ первым способом с целью получения маркированного точечного процесса $\{(\tau_i^{(0)}, \eta_i^{(0)});\ i \geq 0\}$ нулевого уровня. Далее, последовательно начиная с нулевой пачки $\eta_0^{(0)}$ объединяются первые две соседние группы в одном из следующих случаев: а) если предыдущая пачка содержит не более d событий, последующая включает ровно $d+1$ событий и интервал между такими пачками строго меньше величины h_1; б) если предыдущая и последующая группа содержат каждая не более d событий и интервалы между ними строго меньше величины h_2. Это позволяет найти процесс $\{(\tau_i^{(1)}, \eta_i^{(1)});\ i \geq 0\}$ первого уровня, к которому применяем ту же самую процедуру, что и к процессу $\{(\tau_i^{(0)}, \eta_i^{(0)});\ i \geq 0\}$. В результате получаем маркированный точечный процесс $\{(\tau_i^{(2)}, \eta_i^{(2)});\ i \geq 0\}$ второго уровня и т. д.

Теорема 1. *Множество* $\{\omega :\ \lim_{c\to\infty} \tau_i^{(c)}$ *существует* $\}$ *совпадает с достоверным событием* Ω *для любого* $i \geq 0$.

Данная теорема позволяет определить случайную величину $\tau_i = \lim_{c\to\infty} \tau_i^{(c)}$ для любого $i \geq 0$. При таком алгоритме выбора потока $\{(\tau_i, \eta_i);\ i \geq 0\}$ имеем $\tau_i = \tau'_{k_i}$, $\eta_i = k_{i+1} - k_i$ для всех $i \geq 0$ и, следовательно, таким способом определяем метку ν_{k_i} главных элементов и число всех сбоев управляющей системы на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Итак, рассмотренный алгоритм позволяет идентифицировать главные элементы управляющей системы среди всех ее элементов.

3 Статистический анализ потока отказов

Статистический анализ большинства экспериментальных данных об интервалах $\tau'_{i+1} - \tau'_i$, $i \geq 1$, между последовательными наступлениями событий из множества $\{A_\gamma \in \mathcal{F} :\ \gamma \in \Gamma\}$ показывает их зависимость. Более того указанные интервалы, как правило, имеют различные распределения. Используя один из алгоритмов второго раздела удается построить последовательность $\{\tau_i;\ \ i \geq 0\}$ моментов наступления событий из множества $\{A_\theta \in \mathcal{F}:\ \theta \in \Theta\}$.

Например, при соответствующем выборе параметров $h_0,\ h_1,\ h_2,\ \ d$ третьего алгоритма интервалы $X_i = \tau_i - \tau_{i-1},\ i \geq 1$, получаются независимыми в совокупности и имеют одну и ту же функцию распределения вида

$$\begin{gathered} \mathrm{P}(\{\omega:\ X_i = \tau_i - \tau_{i-1} < t\}) = 1 - \exp\left(-\frac{t-h}{\sigma}\right), t \geq h, \\ h = const \geq 0, \sigma = const > 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Это есть смещенное экспоненциальное распределение с параметрами h и σ.

Для проверки гипотезы о независимости и одинаковом распределении случайных величин $X_i = \tau_i - \tau_{i-1},\ \ i \geq 1$, использовались следующие четыре критерия: a) фазово-частотный критерий Валлиса и Мура [5]; b) инверсионный критерий [6]; c) критерий серий, основанный на медиане выборки [7]; d) фазово-частотный критерий с учетом длин фаз [7].

Использование критерия χ-квадрат для конкретных статистических данных об интервалах $\tau_{i+1} - \tau_i,\ \ \ i \geq 0$, указывает на их хорошую согласованность с распределением вида (1). При этом неизвестные параметры h и σ оценивались видоизмененным методом минимума χ-квадрат [8].

В результате применения алгоритмов выделения моментов выхода из строя главных элементов управляющей системы получаем последовательность $\{\eta_i;\ i \geq 0\}$. Компьютерный анализ реальных данных о потоках показывает, что натуральные случайные величины $\eta_i,\ i \geq 0$, являются независимыми в совокупности и имеют одно и то же распределение Бартлетта [2]:

$$P(\eta_i = 1) = 1 - r,\ P(\eta_i = m) = r(1-q)q^{m-2},\ m \geq 2,\ 0 < r, q < 1. \tag{2}$$

Этот анализ проводился по той же схеме, что и анализ для случайных величин $X_i = \tau_i - \tau_{i-1},\ i \geq 1$.

Итак, в работе предложен нелокальный способ задания потоков отказов в восстанавлваемых системах. Эффективность такого подхода показана на реальных примерах из работ [9] и [10]. Распределения вида (1) и (2) позволяют рассмотреть поток отказов типа потока Бартлеттта [2]. При этом поток Бартлетта достаточно точно аппроксимирует реальный поток $\{(\tau_i, \eta_i);\ i \geq 0\}$ отказов. Используя вспомогательный аппроксимирующий поток Бартлетта, предлагается простой способ профилактики главных элементов восстанавливаемой управляющей системы, который приводит к повышению надёжности её работы.

Список литературы

[1] Ляпунов А.А., Яблонский С.В. (1963). Теоретические проблемы кибернетики. *Проблемы кибернетики.* Вып. **9**. М.: Физматгиз. С. 5-22.

[2] Федоткин М.А. (1996). Процессы обслуживания и управляющие системы. *Математические вопросы кибернетики.* Вып. **6**. М.: Наука. С. 51-70.

[3] Федоткин М.А. (2003). О моделях случайных экспериментов с управлением. *Abstracts of International Conference "Kolmogorov and Contemporary Mathematics".* MGU, Moscow, Russia. PP. 656-657.

[4] Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. (1987). *Введение в теорию массового обслуживания.* М.: Наука.

[5] Закс Л. (1976). *Статистическое оценивание.* М.: Статистика.

[6] Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. (1984). *Математическая статистика.* М.: Высшая школа.

[7] Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. (1983). *Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных.* М.: Финансы и статистика.

[8] Крамер Г. (1975). *Математические методы статистики.* М.: Мир.

[9] Кокс Д., Льюис П.(1969). *Статистический анализ последовательностей событий.* М.: Мир.

[10] Bartlett M. S. (1963). The spectral analysis of point processes. *J. R. Statist. Soc. B.* V. 25, Nr. 2. PP. 264–296.