Вычисление параметра потока отказов в логико-вероятностных моделях методом рекурсивного наращивания переменных

Степанянц А.С.
Институт проблем управления
им. В.А.Трапезникова РАН
Профсоюзная 65, Москва,
Россия
lfvrk@ipu.rssi.ru

Аннотация

Рассматриваются методы вычисления параметра потока перехода в заданное логической функцией подмножество состояний, в частности, параметра потока отказов. Для повышения эффективности вычислительных алгоритмов предлагается использовать декомпозицию и метод рекурсивного наращивания переменных. Применение декомпозиции и задачи оценки эффективности (рисков) при учете единовременных потерь часто приводят к немонотонным моделям алгебры логики, для которых необходимо вычисление параметра потока переходов.

Большинство работ по алгоритмизации методов оценки показателей надежности, безопасности систем в классе логико-вероятностного моделирования посвящены вычислениям вероятности выполнения (истинности) некоторой логической функции, определенной на булевских переменных (элементах системы). Отметим, что в логико-вероятностных моделях принципиально подлежат вычислению лишь так называемые дифференциальные показатели, т.е. показатели некоторого состояния или перехода **в заданный момент времени t**, в частности, таким показателем является коэффициент готовности (простоя). Важным показателем, характеризующим переходы системы, например, из состояния работоспособности в состояние неработоспособности, является параметр потока отказов. Этот показатель необходимо вычислять при исследовании эффективности, безопасности, риска эксплуатации систем. Параметр потока отказов определяется как производная по времени от математического ожидания числа отказов. Поэтому среднее значение числа отказов (а в общем случае числа интересующих исследователя переходов) можно определить интегрированием на заданном интервале времени параметра потока отказов (параметра потока переходов в интересующее подмножество состояний).

В [1; 2] предложен метод рекурсивного наращивания переменных для вычисления коэффициента готовности (простоя) и параметра потока отказов, соответственно. Суть его в следующем. Пусть

$$\begin{aligned} p^{(k)} &= P\{S(x_1,...,x_k;t)=1/x_{k+1}=1, x_{k+2}=1,...,x_n=1\}, \\ r^{(k)} &= P\{S(x_1,...,x_k;t)=1/x_{k+1}=0, x_{k+2}=1,...,x_n=1\} \end{aligned} \tag{1}$$

где $x_i = \begin{cases} 1, & \text{когда элемент i работоспособен} \\ 0, & \text{когда элемент i отказал} \end{cases}$

$S(x) = \begin{cases} 1, & \text{когда система работоспособна} \\ 0, & \text{когда система отказала} \end{cases}$

Вычисления коэффициента готовности проводятся по формуле

$$p^{(k+1)} = R_{k+1}(t)p^{(k)} + Q_{k+1}(t)r^{(k)}, \tag{2}$$

где $R_{k+1}(t) = 1 - Q_{k+1} = P\{x_{k+1}(t)=1\}, p^{(0)} = 1$

Последовательно вычисляя $p^{(1)},...,p^{(n)}$, на последнем n-м шаге рекурсии получим коэффициент готовности системы.

Подход рекурсивного наращивания переменных применим и для вычисления параметра потока отказов:

$$\begin{aligned} \omega^{(k+1)}(t) = R_{k+1}(t)\omega^{(k)}(t) + Q_{k+1}(t)\nu^{(k)}(t) + P_{no}^{x_{k+1}}(t)\omega_{k+1}(t), \\ \omega_0(t) = 0, \omega_c(t) = \omega^n(t) \end{aligned} \tag{3}$$

где $P_{no}^{x_{k+1}}(t) = (p^{(k)} - r^{(k)}), k = (0, 1, ..., n-1)$,

$$\begin{aligned} \omega^{(k)}(t) = \omega(t)/x_{k+1} = x_{k+2} = .. = x_n = 1, \\ \nu^{(k)}(t) = \omega(t)/x_{k+1} = 0, x_{k+2} = .. = x_n = 1, \end{aligned} \tag{4}$$

$\omega(t)/\cdots$ - параметр потока отказов, при условии $\cdots$. Метод вычисления параметра потока отказов (3) (как и коэффициента готовности, простоя (2)), можно применять для вычислений, не декомпозируя систему. Но для преодоления проблем размерности, повышения быстродействия численных алгоритмов целесообразно проводить декомпозицию системы.

Эффективным способом решения проблем размерности в задачах анализа надежности является декомпозиция структуры системы или логического описания. При декомпозиции структуры системы можно выделить [3]:

1. Односвязную декомпозицию, когда выделяемые подсистемы (звенья, модули, ...) связываются друг с другом только через две свои вершины, причем одна вершина является входом (ребра связей в нее только входят), а другая – выходом (ребра связей из нее только выходят), т.е. имеем последовательное соединение подсистем. Каждая из подсистем может представлять собой резервированную структуру с некоторой логической функцией (в общем случае k из m) в выходной вершине (или элементе). В данном способе нет сложностей с вычислением и агрегированием показателей надежности, безопасности, технической эффективности.

2. Многосвязную декомпозицию, когда выделяемые подсистемы могут иметь любое число входов и выходов. Сохраняются лишь следующие ограничения (ацикличность связей):

   a. все входные вершины подсистемы L^k являются либо головными, либо связаны с другими (не входящими в L^k) элементами посредством входящих в L^k ребер;

   b. все выходные вершины являются либо конечными, либо связаны с другими элементами посредством исходящих из L^k ребер.

   Сложностей в этом способе много как в выделении таких подсистем, так и в агрегировании некоторых показателей (например, параметра потока отказов). Но эффективность его может оказаться очень высокой и при решении проблем размерности, и при учете особенностей «надежностного поведения».

3. Декомпозицию, связанную с разложением по полной группе событий относительно выделенных элементов, блоков, ...

4. Логическую декомпозицию. В этом способе, не предусматриваются какие-либо преобразования исходной структуры системы. На более простые части разбивается сама задача надежностного моделирования. Это достигается разделением общего логического критерия работоспособности, отказа на несколько частных и установлением связи (лучше арифметической) их с системной функцией. Одним из способов агрегирования показателей может быть применение теоремы суммирования вероятностей совместных событий, что позволит получать двухсторонние оценки показателей.

Способы декомпозиции широко применяются, но преимущественно для вычисления коэффициента готовности (простоя). Предлагаемый в статье метод вычисления параметра потока отказов основывается на декомпозиции по п.3. Для снижения трудоемкости расчетов целесообразно также применять декомпозицию по п.1. Если рассматривать простейшую односвязную структурную декомпозицию, то в этом случае алгоритм вычисления параметра потока следующий:

- все последовательные, параллельные и k из m надежностные группы элементов «укрупняются» в один элемент с вычисленным по ниже приведенным формулам (5) – (7) параметром потока отказов (а для коэффициента готовности, простоя - по известным формулам последовательного и параллельного соединения).

- Оставшаяся структура (возможно, после нескольких итераций «укрупнения») называется в литературе «неприводимой». Вычисления параметра потока отказов в этом случае проводятся по (3). Причем элементам, наибольшее число раз входящим в различные конъюнкции (лучше в минимальные пути), различным перемычкам в графах связи, блок-схемах надежности целесообразно присвоить наибольшие номера. Тогда вычисления на первых шагах рекурсии (пока эти элементы рассматриваются как работоспособные в соответствии с первым выражением (4)) оказываются достаточно простыми по формулам последовательно-параллельных соединений.

Выражения для вычисления параметра потока отказов при декомпозиции с выделением параллельных и последовательных групп элементов и «свёртка» их в один элемент с эквивалентным параметром потока отказов имеют следующий вид:

- m параллельно соединенных элементов, когда для работоспособности требуется один (1 из m)

$$\omega_{1\_m}\{t\} = \sum_{j=1}^{m}[\omega_j(t)\prod_{g \neq j}^{m} Q_g(t)], \tag{5}$$

- m последовательно соединенных элементов, когда для работоспособности требуется все m (1 из m)

$$\omega_{m\_m}\{t\} = \sum_{j=1}^{m}[\omega_j(t)\prod_{g \neq j}^{m} R_g(t)], \tag{6}$$

- m параллельно соединенных элементов, когда для работоспособности требуется k элементов (k из m)

$$\omega_{k\_m}\{t\} = C_m^{m-k} Q^{m-k}(t) k\omega(t) R^{k-1}(t), \tag{7}$$

где $R_i(t),\ Q_i(t) = 1 - R_i(t),\ \omega_i(t)$ - коэффициент готовности, коэффициент простоя, параметр потока отказов элемента i.

Многосвязная и логическая декомпозиции, формализация логическими выражениями многоуровневых систем (в задачах анализа эффективности, безопасности) приводят к немонотонным моделям алгебры логики. В этом случае параметр потока переходов в заданное подмножество состояний должен вычисляться с учетом как отказов, так и восстановления.

Список литературы

[1] Акулова Л.Г. *О стохастической сложности вычисления надежности булевских систем*/ Ярославль.: Изд.-во ЯГУ, 1983

[2] Степанянц А.С. *Вычисление параметра потока отказов в логико-вероятностных моделях методом рекурсивного наращивания переменных*/ А и Т, № 9, 2007.

[3] Можаев А.С. *Общий логико-вероятностный метод анализа надежности сложных систем*/ Уч. пособие. Л.: ВМА, 1988.