Ненадёжные системы с различными вариантами обновления

Зарядов И.С.
Кафедра ТВ и МС
Российский Университет Дружбы Народов
Орджоникидзе, 3, г. Москва
Россия
izaryadov@rambler.ru

Аннотация

Рассмотрены многолинейные системы массового обслуживания с, полным обновлением без дообслуживания и с дообслуживанием, а также с обобщённым обновлением. Предложены методы расчёта стационарных показателей функционирования систем при рекуррентном входящем потоке заявок и экспоненциальном обслуживании при разных дисциплинах обслуживания и обобщённого обновления.

1 Системы с (полным) обновлением

Системы массового обслуживания с (полным) обновлением были впервые рассмотрены А.Я. Крейниным в (1). Идея заключалась в том, что в момент окончания своего обслуживания на приборе заявка либо с вероятностью p просто покидала систему, либо с вероятностью $q = 1-p$ (q — вероятность обновления) «убивала» все заявки в накопителе и покидала систему. Этот подход использовался для моделирования реальных систем с потерей данных без выхода из строя прибора. В дальнейшем было предложено использовать системы с обновлением для описания поведения финансового актива (2).

В дальнейшем, П.П. Бочаровым (4) было предложено ввести в модель Крейнина дообслуживание — с вероятностью q обслужившаяся заявка остаётся в системе, убивая все заявки в накопителе, и с вероятностью $p = 1 - q$ покидает систему. Здесь вероятность q также называется вероятностью обновления.

Как оказалось, для марковских систем с обновлением (как с дообслуживанием, так и без) применимы алгоритмы нахождения стационарных вероятностей состояний, построенные на основе обобщённого процесса размножения и гибели (см., например, (5; 6)), что и было доказано в работе (4).

Следующим этапом развития идеи обновления стало обобщённое обновление (7; 8).

2 Обобщенное обновление

Обобщённое обновление определяется следующим образом. Пусть в накопителе находится $k,\ k \geq 0$, заявок. Тогда находящаяся на приборе заявка в момент окончания обслуживания одновременно с уходом из системы: а) или с вероятностью $q(l)$ «убивает» в накопителе ровно $l,\ l < k$, заявок, б) или с вероятностью $Q(k) = q + \sum\limits_{i=k}^{\infty} q(i)$ полностью опустошает накопитель. Вероятность $q,\ q \geq 0$, представляет собой вероятность того, что обслужившаяся заявка «убьёт» все заявки в накопителе, даже если их будет бесконечное число, а $q(0)$ — вероятность того, что закончившая обслуживание на приборе заявка покинет систему, не выбивая заявок из накопителя. Вероятности $q(l)$ при $l > 0$ будем называть вероятностями обновления, а q — вероятностью полного обновления. Очевидно, что $Q(0) = \sum\limits_{l=0}^{\infty} q(l) + q = 1$.

Отметим, что при $q(0) = 1$ система с обобщённым обновлением превращается в стандартную систему, в которой окончание обслуживания заявки на приборе не приводит к потере других заявок из накопителя, а при $q(l) = 0,\ l > 0$, и $q \neq 0$ получаем систему с полным обновлением, однолинейный вариант которой рассматривался в (1), а многолинейный вариант с накопителем ограниченной ёмкости (в частности, при пуассоновском входящем потоке заявок) — в (4).

Для обобщённого обновления рассматривалась n-линейную систему массового обслуживания (СМО) $GI/M/n/r$ с накопителем конечной и бесконечной ёмкости и следующими вариантами дисциплин обслуживания и обобщённого обновления:

прямой порядок обновления (заявки для «убийства» выбираются в порядке поступления) при выборе заявок из накопителя на обслуживание в порядке поступления;

инверсионном порядке обновления (заявки для «убийства» выбираются в порядке, обратном поступлению в систему) при выборе заявок из очереди на обслуживание в порядке поступления;

прямом порядке обновления (заявки для «убийства» выбираются в порядке поступления в систему) при инверсионном порядке выбора заявок из очереди на обслуживание;

инверсионном порядке обновления при инверсионном порядке выбора заявок из очереди на обслуживание.

Исследование рассматриваемой системы было проведено с помощью вложенной цепи Маркова, образованной числами $\nu(\tau_n - 0)$ заявок в системе в моменты времени $\tau_n - 0$, где τ_n — момент поступления n-й заявки.

Необходимым и достаточным условием существования стационарного (по моментам поступления заявок в систему) режима функционирования СМО является либо выполнение неравенства $q > 0$, либо, при $q = 0$, выполнение условия $(a\mu_{\text{ср}})^{-1} < 1$, где $\mu_{\text{ср}} = \mu n \sum\limits_{i=0}^{\infty}(i+1)q_i$ — среднее число покидающих систему в единицу времени заявок при условии, что в системе находится бесконечное число заявок.

Основное внимание при исследовании уделялось поиску временных характеристик, а именно распределений времён пребывания в накопителе принятой в систему, но «убитой» заявки, обслуженной и произвольной заявок

Получены математические соотношения для вычисления стационарных распределений основных характеристик рассматриваемой системы — числа заявок в системе по вложенной цепи Маркова и по времени. Найдены формулы, позволяющие находить вероятность того, что заявка, поступающая в систему, будет «убита» или попадёт на прибор, общая вероятность потери заявки (в случае конечного накопителя).

Для всех рассмотренных случаев найдены в терминах преобразования Лапласа-Стилтьеса явном виде получены искомые функции распределения, а также средние стационарные времена пребывания в накопителе обслуженной, «убитой» и произвольной заявок..

Интересно отметить, что для случая накопителя бесконечной ёмкости и когда заявки в системе обслуживаются и выбиваются в порядке поступления, время пребывания в накопителе «убитой» подчинено экспоненциальному закону, времена пребывания в накопителе обслуженной и произвольной заявок за вычетом скачка в нулевой момент времени также имеют экспоненциальное распределение. Этот факт позволяет достаточно легко находить различные характеристики, связанные с временем пребывания заявки в системе.

Список литературы

[1] Kreinin A. (1997) Queueing Systems with Renovation *Journal of Applied Math. Stochast. Analysis 10*(4), 431–443.

[2] Kreinin A. (2003) Inhomogeneous Random Walks: Applications in Queueing and Finance *CanQueue. Fields Institute. Toronto.*

[3] Gelenbe E., Glynn P., Sigman K. (1991) Queues with negative arrivals *J. Appl. Prob. 28*, 245–250.

[4] Бочаров П.П., Зарядов И.С. (2007) Стационарное распределение вероятностей в системах массового обслуживания с обновлением *Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика 1–2*, 15–25.

[5] Bocharov P.P., D'Apice C., Pechinkin A.V., Salerno S. (2004) *Queueing Theory.* Utrecht, Boston: VSP.

[6] Naoumov V.A. (1995) Matrix-multiplicative approach to quasi-birth-and-death processes analysis *Proc. First Internat. Conf. on Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models* Detroit.

[7] Зарядов И.С. (2008) Стационарные характеристики обслуживания в системе $G/M/n/r$ с обобщённым обновлением. *Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика. 2*, 3–10.

[8] Зарядов И.С. (2008) Стационарные характеристики обслуживания системы $G/M/n/r$ с некоторыми вариантами дисциплины обобщённого обновления // *Информационные процессы 8* (2), 108–124.